Μάθημα 13ο 07/05/2020

§3.3 (Αποτελείται από δύο βασικά κομμάτια:

(α) παραμετρικές καμπύλες, τις οποίες θα δούμε πιο αναλυτικά στο 5ο κεφάλαιο

(β) σύμμορφες απεικονίσεις, από τις οποίες καλό είναι να ξέρουμε πως ορίζονται μόνο, γιατί είναι εκτός ύλης.

Ορισμός:

Μια <u>συνεχής συνάρτηση</u> $\gamma: I \to \mathbb{C}$, με $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα, ονομάζεται παραμετρική καμπύλη στο $\mathbb{C}$ και η εικόνα της $C = \gamma(I) \subset \mathbb{C}$ ονομάζεται καμπύλη στο $\mathbb{C}$.

Σχόλιο:
- Επειδή αντιστοιχίσαμε τον $\mathbb{C}$ με τον $\mathbb{R}^2$ ότι ισχύει για τις καμπύλες στον $\mathbb{R}^2$ ισχύει και για τις καμπύλες στο $\mathbb{C}$.
- Ο $\mathbb{C}$ είναι ίδιος με τον $\mathbb{R}^2$ μόνο που στο $\mathbb{C}$ έχουμε τον πολ/σμό διανυσμάτων.

Ορισμός

(α) Η $\gamma: I \to \mathbb{C}$, $I \subset \mathbb{R}$, ονομάζεται <u>συνεχής</u> αν:

$$\forall t_0 \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t \in I, |t - t_0| < \delta : |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < \varepsilon$$

ή

$$\forall t_0 \in I \ \forall (t_n) \subset I \text{ με } t_n \to t_0 : \gamma(t_n) \to \gamma(t_0)$$

(β) <u>Πολυγωνική γραμμή</u>: η καμπύλη που σχηματίζεται αν ενώσουμε $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, διαφορετικά σημεία του $\mathbb{C}$ με ευθύγραμμα τμήματα.

(γ) <u>Συνεκτικός τόπος</u>: ένα ανοικτό υποσύνολο $D \subset \mathbb{C}$ αν για κάθε δύο σημεία του D υπάρχει μια πολυγωνική γραμμή που τα ενώνει και βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο D

(δ) Η $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>διαφορίσιμη</u> στο $t \in I$ αν υπάρχει η παράγωγος της γ στο t:

$$\gamma'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$= (\mathrm{Re}\gamma)'(t) + i(\mathrm{Im}\gamma)'(t)$$

$$= \mathrm{Re}\,\gamma'(t) + i \cdot \mathrm{Im}\,\gamma'(t)$$

(ε) Η $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>συνεχώς διαφορίσιμη</u> ή C^1-καμπύλη εάν:

$\mathrm{Re}\gamma, \mathrm{Im}\gamma \in C^1$ (παραγωγίσιμες και παράγωγος συνεχής)

(στ) Η $\gamma : I \to \mathbb{C}$ ονομάζεται <u>κανονική</u> αν:

$$\gamma'(t) \neq 0, \ \forall t \in I.$$

Ιδιότητες της διαφορίσιμης καμπύλης

(i) $(\gamma_1+\gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t)$

(ii) $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t)\cdot\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\cdot\gamma_2'(t)$

(iii) $\left(\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)'(t) = \dfrac{\gamma_1'(t)\cdot\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\cdot\gamma_2'(t)}{\gamma_2^2(t)}$, $\gamma_2(t) \neq 0$

SOS Άσκηση: Αποδείξτε τις ιδιότητες

- Έκανε όμως την απόδειξη του (i).

Απόδειξη (i)

$$(\gamma_1+\gamma_2)'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{(\gamma_1+\gamma_2)(t+h) - (\gamma_1+\gamma_2)(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) + \gamma_2(t+h) - \gamma_1(t) - \gamma_2(t)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h} + \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_1(t+h) - \gamma_1(t)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_2(t+h) - \gamma_2(t)}{h}$$

$$= \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t). \blacksquare$$

Άρα: $\boxed{(\gamma_1+\gamma_2)'(t) = \gamma_1'(t) + \gamma_2'(t).}$

Κανόνας της Αλυσίδας :

Αν $f: D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ ανοικτό, μιγαδικά διαφ/μη και $\gamma: I \to \mathbb{C}$ διαφορίσιμη στο $t \in I$

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$$

Άσκηση : Η απόδειξη του κανόνα της αλυσίδας

Πρόταση 3.3.1 (SOS)

Έστω $D \subset \mathbb{C}$ τόπος, $f: D \to \mathbb{C}$: ολόμορφη με $f' = 0$. Τότε η f είναι σταθερή.

Απόδειξη

Έστω δύο οποιαδήποτε σημεία $a, b \in D$ τα οποία συνδέονται από την πολυγωνική γραμμή $\gamma_1 \oplus \dots \oplus \gamma_m$ με $m \in \mathbb{N}$, που βρίσκεται ολόκληρη μέσα στο D, με

$$\gamma_k(t) = a_{k-1} + t(a_k - a_{k-1}), \quad t \in [0,1]$$

$$a_0 = a, \quad a_m = b, \quad k = 1 \dots m$$

Από την ολομορφία της f με $f' = 0$ και τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$(f \circ \gamma_k)'(t) = f'(\gamma_k(t))(a_k - a_{k-1}) = 0, \quad t \in [0,1]$$
$$k = 1 \dots m$$

και συνεπώς από θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού για τις πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής $Re(f \circ \gamma_k)$ και $Im(f \circ \gamma_k)$:

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{m} (f \circ \gamma_k)(1) - (f \circ \gamma_k)(0) = 0$$

- $\int_a^\beta \gamma'(t)\,dt$: ονομάζεται ολοκλήρωμα της καμπύλης όχι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα.

- $\gamma \in C^1([a,b]) \Rightarrow \gamma(\beta)-\gamma(a) = \int_a^\beta \gamma'(t)\,dt =$

$$= \int_a^\beta Re(\gamma'(t))\,dt + i\int_a^\beta Im(\gamma'(t))\,dt$$

$$= \int_a^\beta (Re\gamma)'(t)\,dt + i\int_a^\beta (Im\gamma)'(t)\,dt$$

$$= \underline{(Re\gamma)(\beta)} - \underline{(Re\gamma)(a)} + \underline{i((Im\gamma)(\beta)} - \underline{(Im\gamma)(a))}$$

$$= \gamma(\beta)-\gamma(a).$$

Επομένως: $\boxed{\int_a^\beta \gamma'(t)\,dt = \gamma(\beta)-\gamma(a)}$

→ Αν $\gamma'(t)=0 \quad \forall\, t \in [a,\beta] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad Re(\gamma'(t)) = 0,\ Im(\gamma'(t)) = 0 = 0,\ \forall t \in [a,b]$$

$$\Leftrightarrow \quad \gamma(\beta)-\gamma(a)=0 \quad (\text{αφού } \int_a^\beta \gamma'(t)\,dt=0)$$

<u>Ερώτηση</u> Πως προκύπτει :

$$\gamma'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h} = Re\gamma'(t) + i\,Im\gamma'(t) \ ???$$

<u>Απάντηση</u>

$$\gamma'(t) = \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}}_{\text{γνωστό αφού } \gamma : I \to R \text{ με } I \subset R \subset C}$$

(δείξε ορισμό ορίου μιγαδικής συνάρτησης)

$$\underbrace{\gamma'(t)}_{\substack{= \\ Re(\gamma'(t)) \\ + i\, Im(\gamma'(t))}} = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{Re(\gamma(t+h)) - Re(\gamma(t))}{h}$$

$$+ i \lim_{h \to 0} \frac{Im(\gamma(t+h)) - Im(\gamma(t))}{h}$$

$$\overset{\text{ΑΠΙ}}{=} (Re\gamma)'(t) + i\,(Im\gamma)'(t) \in \mathbb{C}$$

$$= Re\,\gamma'(t) + i \cdot Im\,\gamma'(t)$$

Σύμμορφες Απεικονίσεις : εκτός ύλης.

Εκτός ύλης : Σελίδα 89 μέχρι Σελίδα 97.

Να γνωρίζω μόνο τον ορισμό από Σύμμορφες απεικονίσ